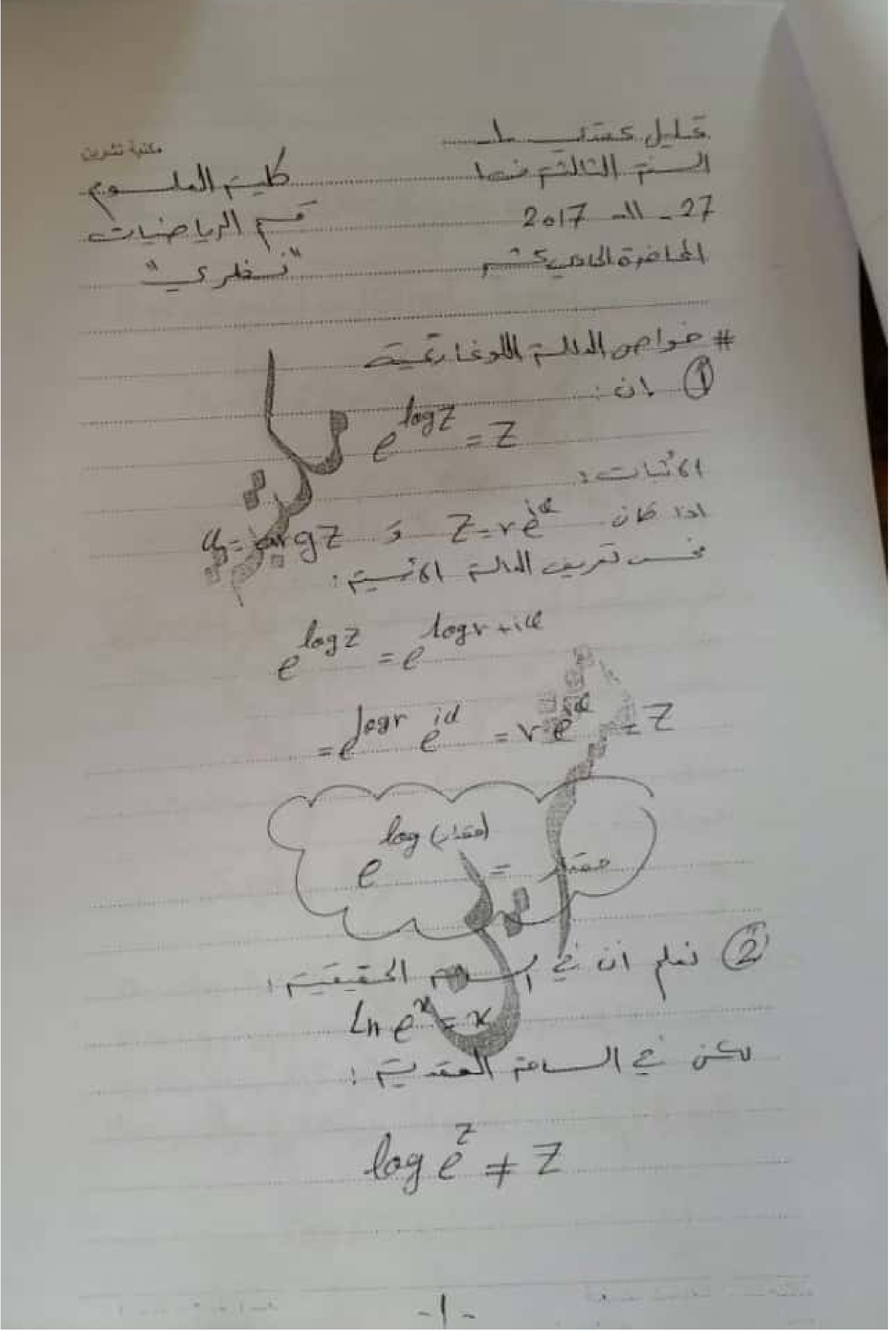


تحليل عقدي
السنة الثالثة رياضيات
27 - 11 - 2017
المحاضرة الحادية عشر

كلية العلوم
قسم الرياضيات
"نظري"

خواص الدالة اللوغاريتمية

① أن:

$$e^{\log z} = z$$

الإثبات:

إذا كان $z = re^{i\theta}$ و $\theta = \arg z$

فمن تعريف الدالة الأسية:

$$e^{\log z} = e^{\log r + i\theta}$$

$$= e^{\log r} e^{i\theta} = re^{i\theta} = z$$

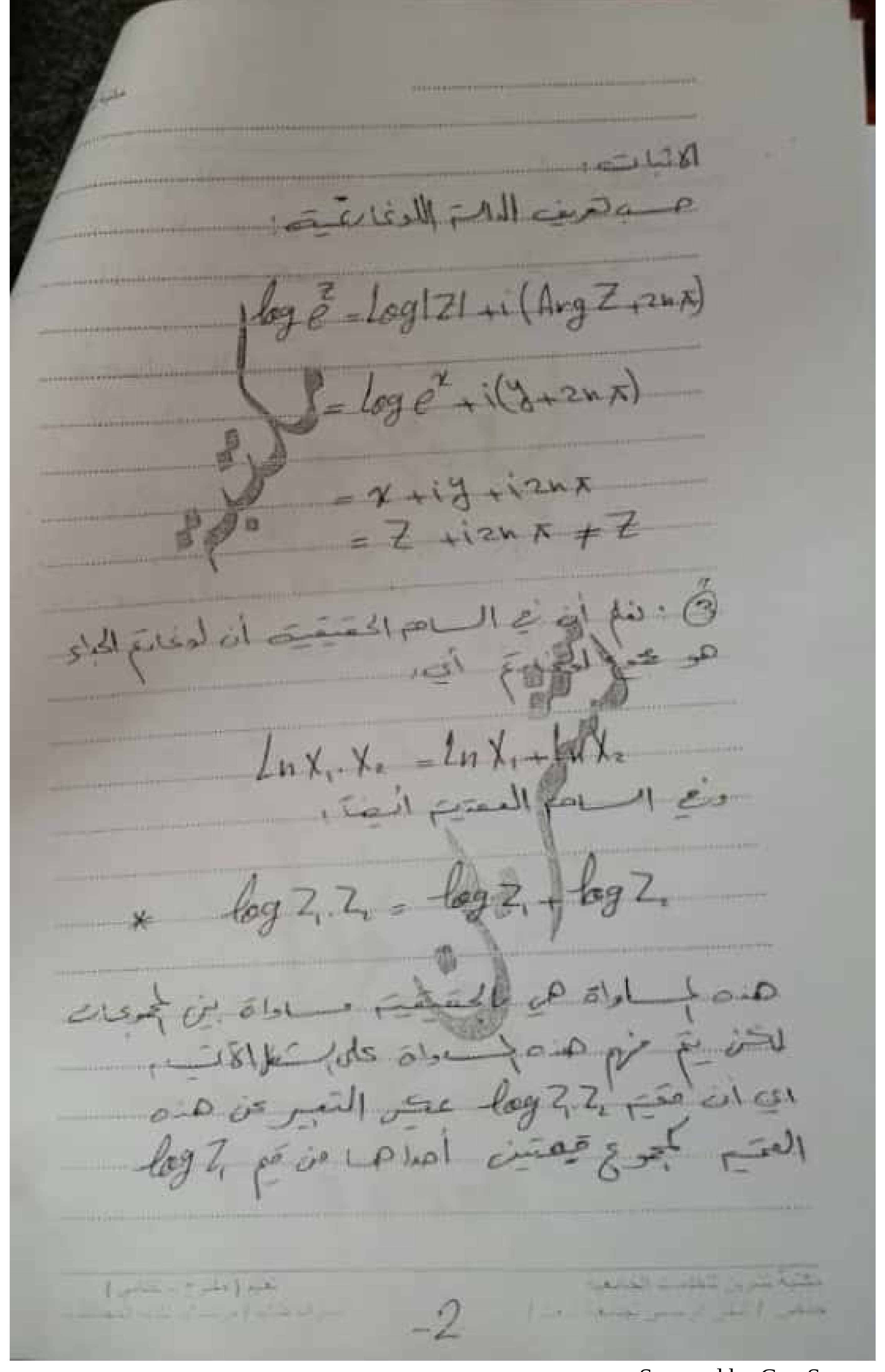
$$e^{\log(\text{مقدار})} = \text{مقدار}$$

② نعلم أن في الساحة الحقيقية:

$$\ln e^{x} = x$$

لكن في الساحة العقدية:

$$\log e^{z} \neq z$$



الاثبات:

حسب تعريف الدالة اللوغاريتمية:

$$\log e^{z} = \text{Log}|Z| + i(\text{Arg}\, Z + 2n\pi)$$

$$= \log e^{x} + i(y + 2n\pi)$$

$$= x + iy + i2n\pi$$

$$= Z + i2n\pi \neq Z$$

③: نعلم أن في الأعداد الحقيقية أن لوغاريتم الجداء هو مجموع اللوغاريتم أي:

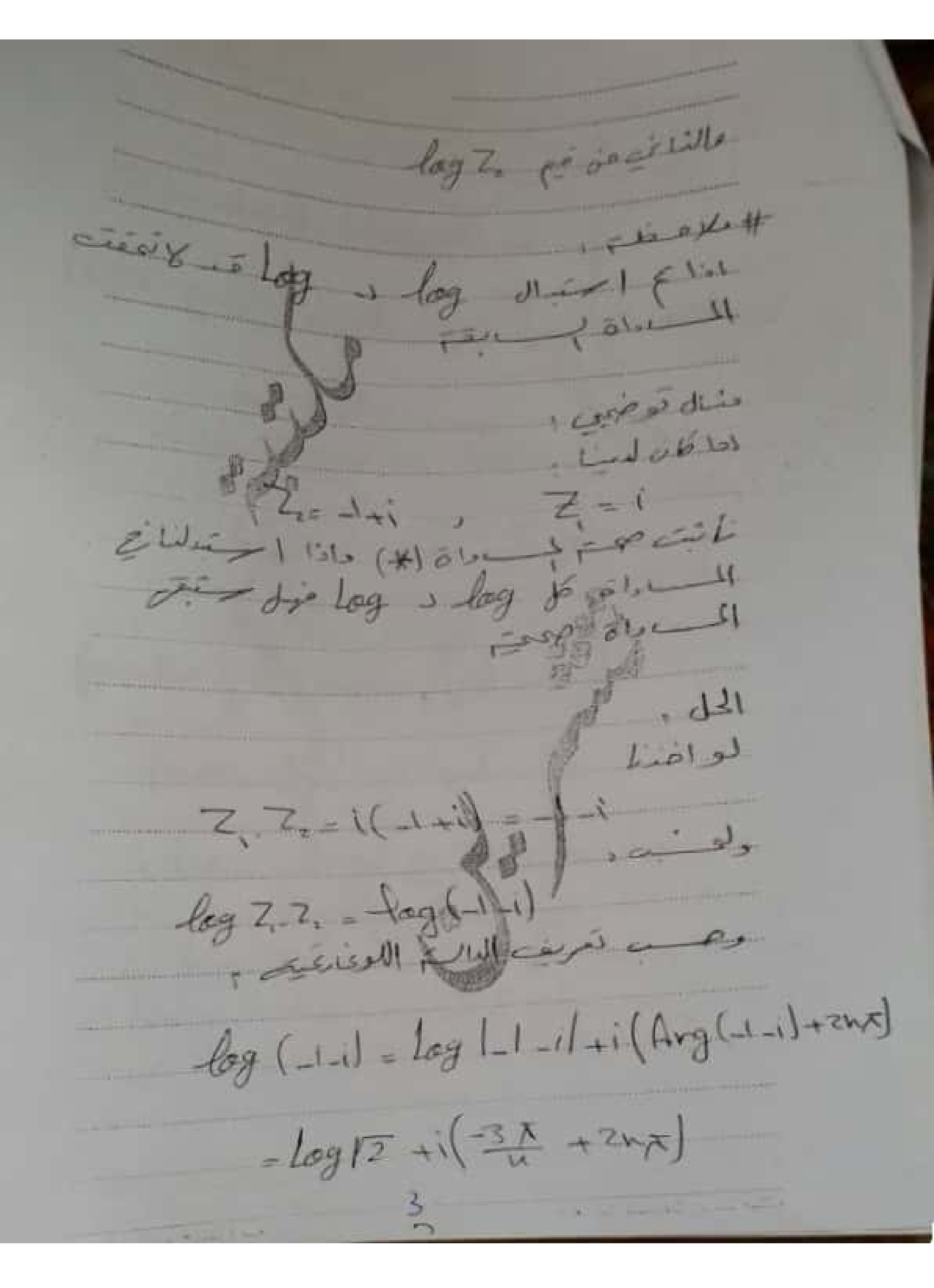
$$\text{Ln}\, x_1 \cdot x_2 = \text{Ln}\, x_1 + \text{Ln}\, x_2$$

وفي الأعداد العقدية أيضاً:

$$* \quad \log Z_1 \cdot Z_2 = \log Z_1 + \log Z_2$$

هذه المساواة هي الحقيقة مساواة بين المجموعات لكن يتم فهم هذه المساواة على الشكل الآتي:

أي أن قيم $\log Z_1 Z_2$ عكس التعبير عن هذه القيم بمجموع قيمتين أحداهما من قيم $\log Z_1$



والثاني من قيم $\log z_2$

ملاحظة:

اذا ع استبدال log بـ Log قد لا تتحقق المساواة السابقة.

مثال توضيحي:

اذا كان لدينا:

$z_2 = -1+i$, $z_1 = i$

اثبت صحة المساواة (*) واذا استبدلنا المساواة كل log بـ Log فهل ستبقى المساواة صحيحة

الحل:

لو اخذنا

$$z_1 . z_2 = i(-1+i) = -1-i$$

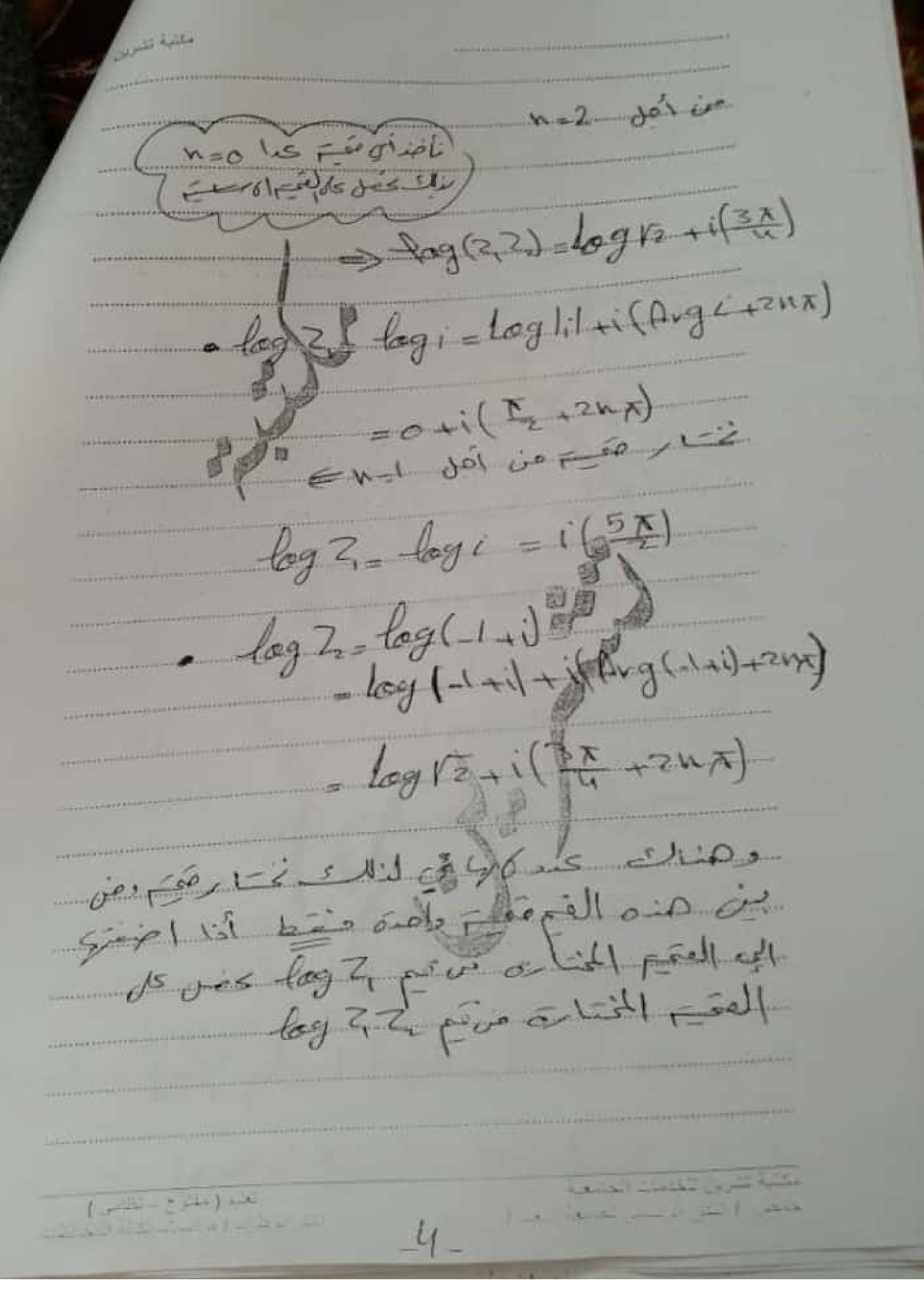
ولهذا:

$$\log z_1 . z_2 = \log(-1-i)$$

وحسب تعريف الدالة اللوغاريتمية:

$$\log(-1-i) = \log|-1-i| + i(\text{Arg}(-1-i) + 2n\pi)$$

$$= \log\sqrt{2} + i\left(\frac{-3\pi}{4} + 2n\pi\right)$$



من أجل $n=2$

ناخذ أي قيمة كما $n=0$
بذلك نحصل على القيمة الرئيسية

$$\Rightarrow \log(z_1 z_2) = \log\sqrt{2} + i\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

• $\log z_1 = \log i = \log|i| + i(\text{Arg}\, i + 2n\pi)$

$$= 0 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

نختار قيمة من أجل $n=1 \Leftarrow$

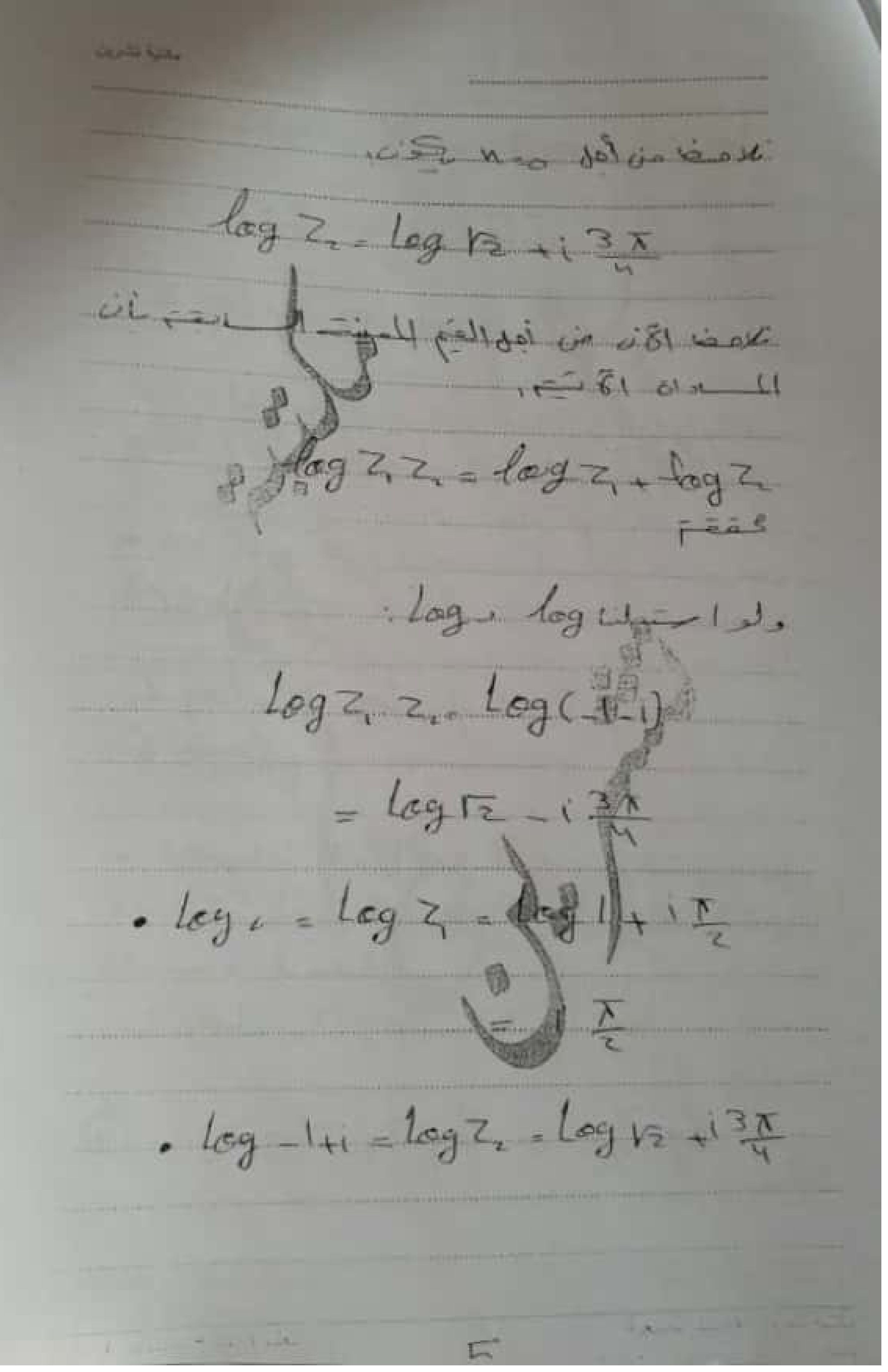
$$\log z_1 = \log i = i\left(\frac{5\pi}{2}\right)$$

• $\log z_2 = \log(-1+i)$

$$= \log|-1+i| + i(\text{Arg}(-1+i) + 2n\pi)$$

$$= \log\sqrt{2} + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi\right)$$

وهناك عدد لا نهائي لذلك نختار قيمة من بين هذه القيم قيمة واحدة فقط أذا أضفنا إلى القيم المختارة من قيم $\log z_1$ [illegible] كل القيم المختارة من قيم $\log z_1 z_2$



نلاحظ من أول مرة n تتحقق:

$$\log z_2 = \log \sqrt{2} + i\,\frac{3\pi}{4}$$

نلاحظ الآن من أجل القيم الرئيسية لـ Log تحقق أن المساواة الآتية:

$$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$$

متحققة

ولو استبدلنا log بـ Log:

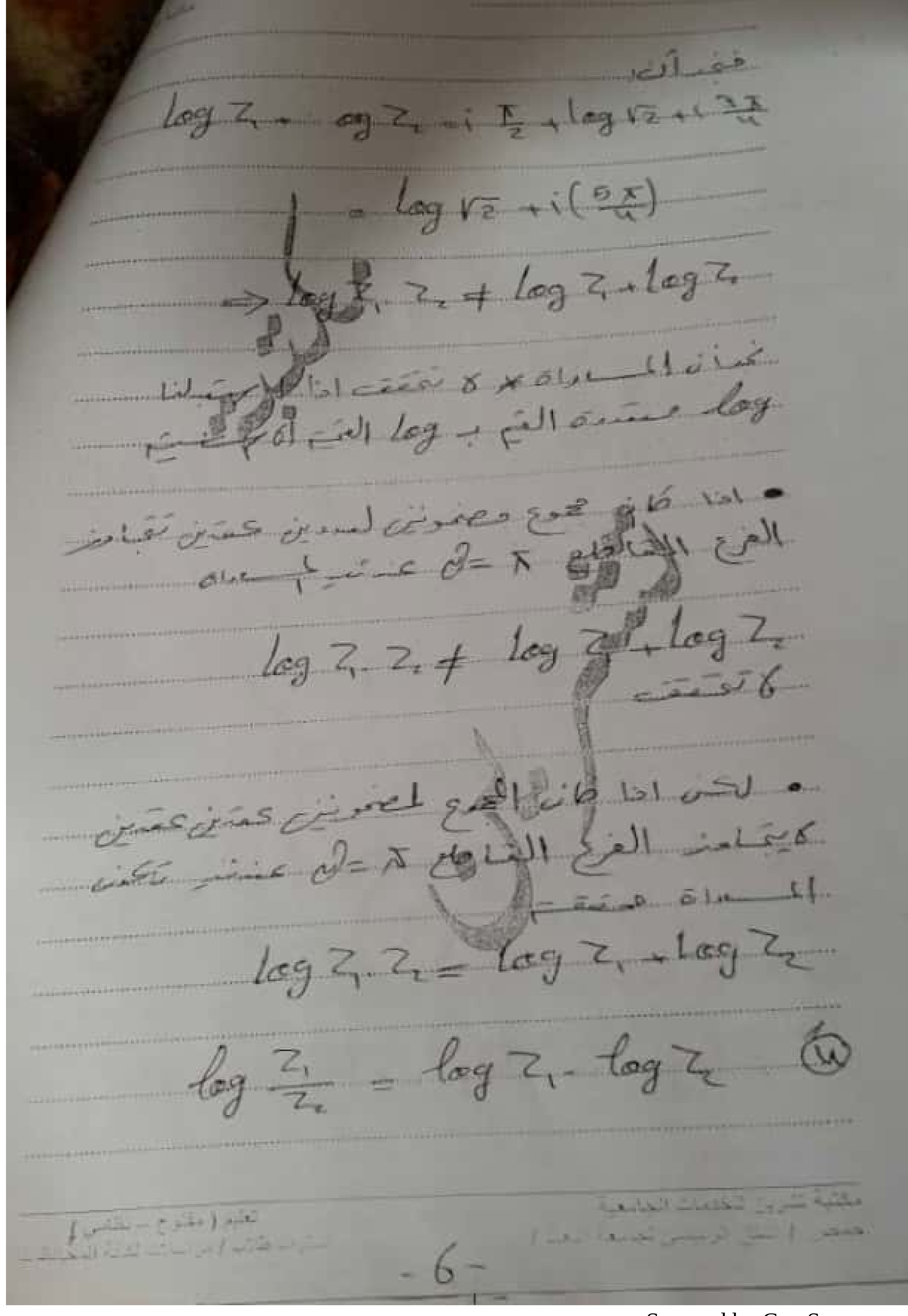
$$\operatorname{Log} z_1 z_2 = \operatorname{Log}(-1-i)$$

$$= \operatorname{Log} \sqrt{2} - i\,\frac{3\pi}{4}$$

- $\log i = \operatorname{Log} z_1 = \operatorname{Log} 1 + i\,\frac{\pi}{2}$

$$= i\,\frac{\pi}{2}$$

- $\log -1+i = \log z_2 = \operatorname{Log} \sqrt{2} + i\,\frac{3\pi}{4}$



نفرض أن

$\log z_1 + \log z_2 = i\frac{\pi}{2} + \log\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4}$

$= \log\sqrt{2} + i\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow \log z_1 z_2 \neq \log z_1 + \log z_2$

نجد أن المساواة × لا تتحقق اذا استبدلنا log بقيمة القيم بـ log القيم الرئيسية

• اذا كان مجموع مضمونين لعددين مركبين يتجاوز الفرع الرئيسي $\theta = \pi$ عند ذلك المساواة

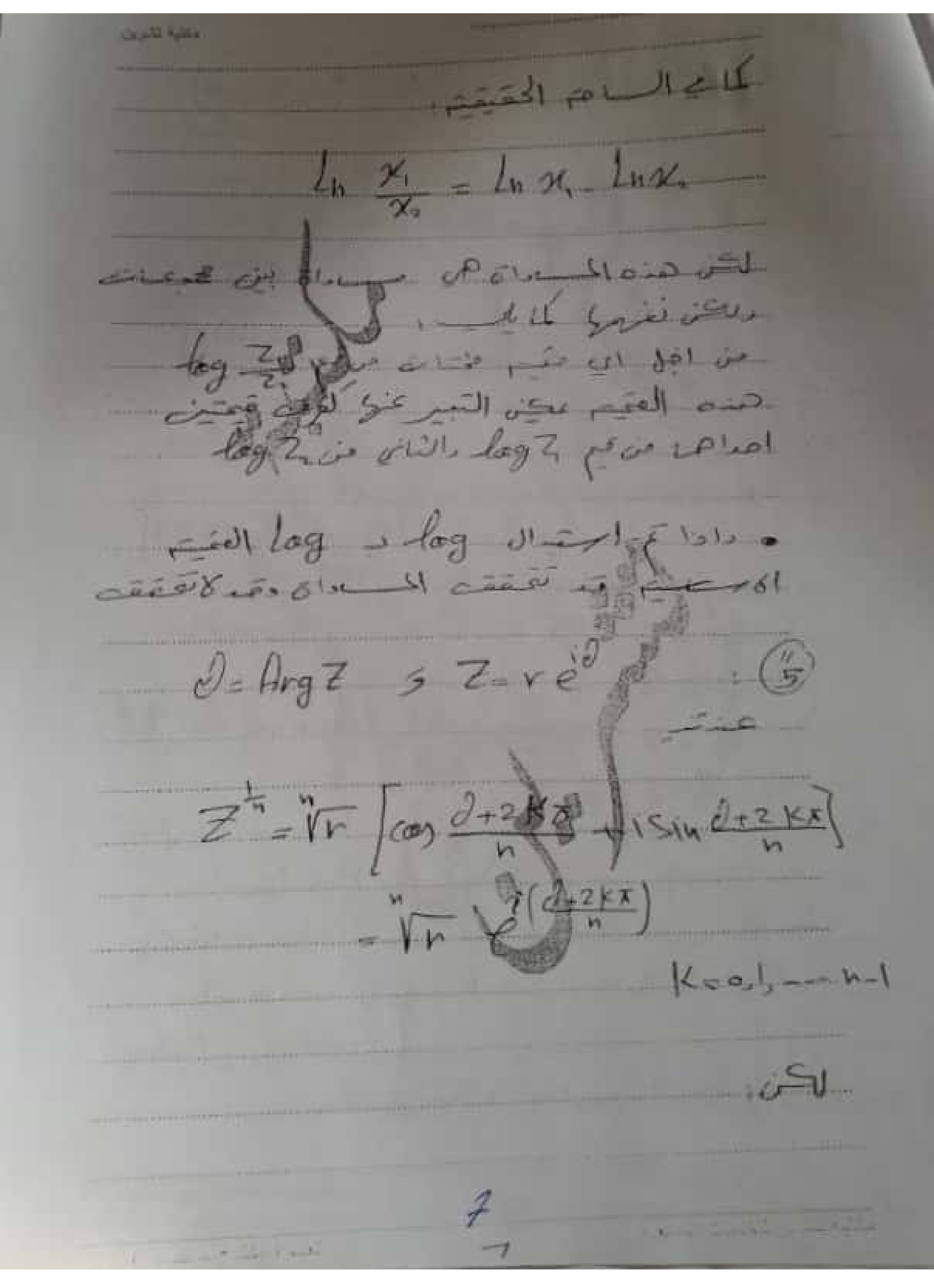
$\log z_1 z_2 \neq \log z_1 + \log z_2$

لا تتحقق

• لكن اذا كان المجموع لمضمونين لعددين مركبين لا يتجاوز الفرع الرئيسي $\theta = \pi$ عند ذلك تكون المساواة متحققة

$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$

(٢) $\log\frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2$



كما في الحالة الحقيقية:

$$\ln \frac{x_1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2$$

لكن هذه المساواة هي مساواة بين مجموعات ولكن نفسرها كما يلي:
من اجل اي قيم مختارة من $\log \frac{z_1}{z_2}$
هذه القيم يمكن التعبير عنها كفرق قيمتين
احداهما من قيم $\log z_1$ والثاني من $\log z_2$

• واذا تم استبدال $\log$ بـ Log القيم الاساسية قد تتحقق المساواة وقد لا تتحقق

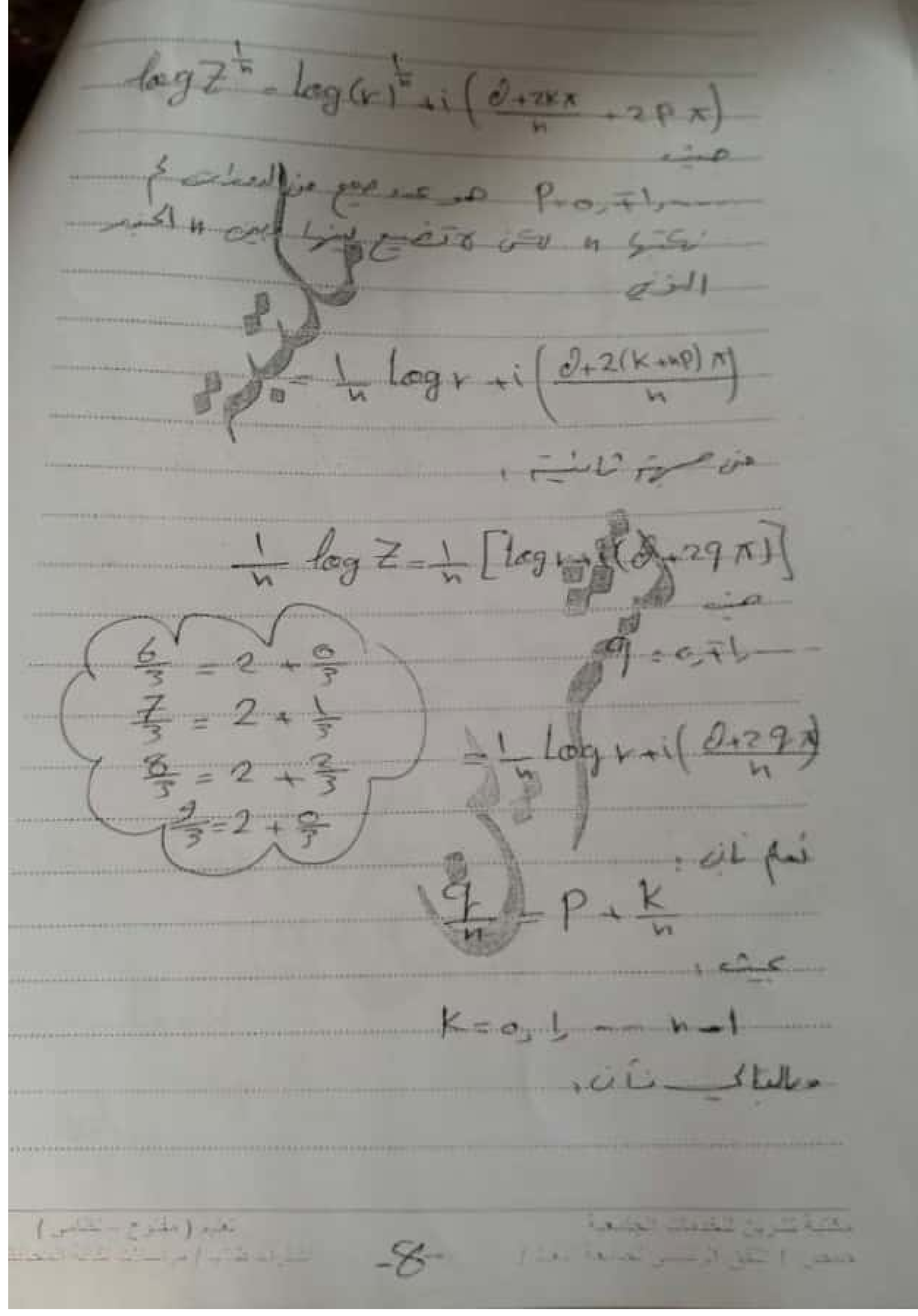
(5): $z = re^{i\theta}$ و $\theta = \operatorname{Arg} z$
عندئذ

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

$$= \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$$

$k = 0, 1, \dots, n-1$

لكن:



$$\log Z^{\frac{1}{n}} = \log (r)^{\frac{1}{n}} + i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} + 2p\pi\right)$$

حيث

$p = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$ هو عدد صحيح من المعادلة ثم نكتبها n ونضع بينها بين n الكسر الخرج

$$= \frac{1}{n}\log r + i\left(\frac{\theta + 2(k+np)\pi}{n}\right)$$

من صيغة ثانية :

$$\frac{1}{n}\log Z = \frac{1}{n}\left[\log r + i(\theta + 2q\pi)\right]$$

حيث

$q = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

$$= \frac{1}{n}\log r + i\left(\frac{\theta + 2q\pi}{n}\right)$$

$\frac{6}{3} = 2 + \frac{0}{3}$

$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$

$\frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$

$\frac{9}{3} = 2 + \frac{0}{3}$

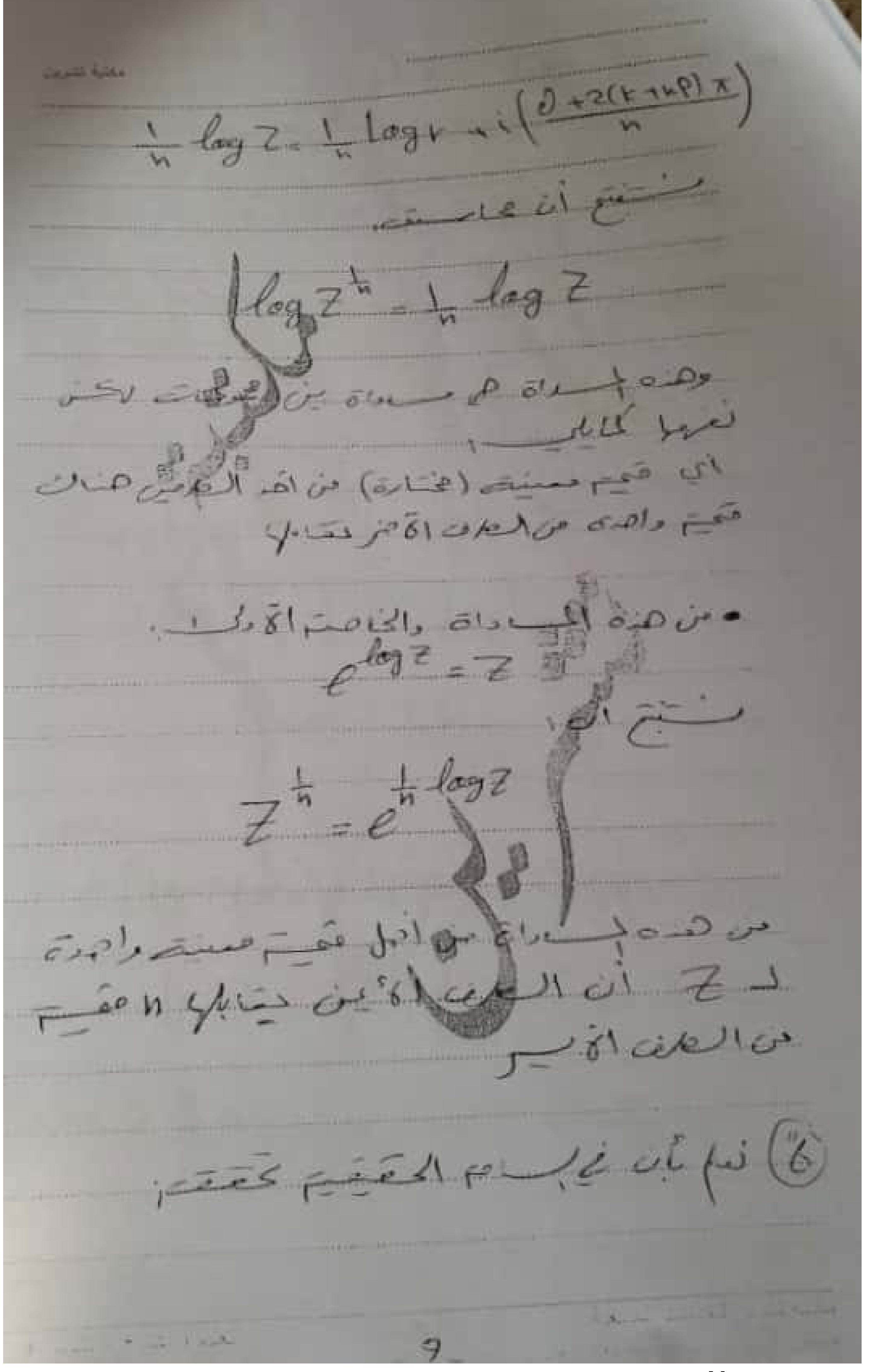
ثم أن :

$$\frac{q}{n} = p + \frac{k}{n}$$

حيث :

$k = 0, 1, \ldots, n-1$

وبالتالي نأخذ :



$$\frac{1}{n}\log z = \frac{1}{n}\log r + i\left(\frac{\theta + 2(k+np)\pi}{n}\right)$$

نستنتج أن مما سبق

$$\log z^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log z$$

وهذه المساواة هي مساواة بين مجموعات لكن نعرفها كما يلي

أي قيم معينة (مختارة) من أحد الطرفين هناك قيمة واحدة من الطرف الآخر تقابلها

• من هذه المساواة والخاصة الأولى

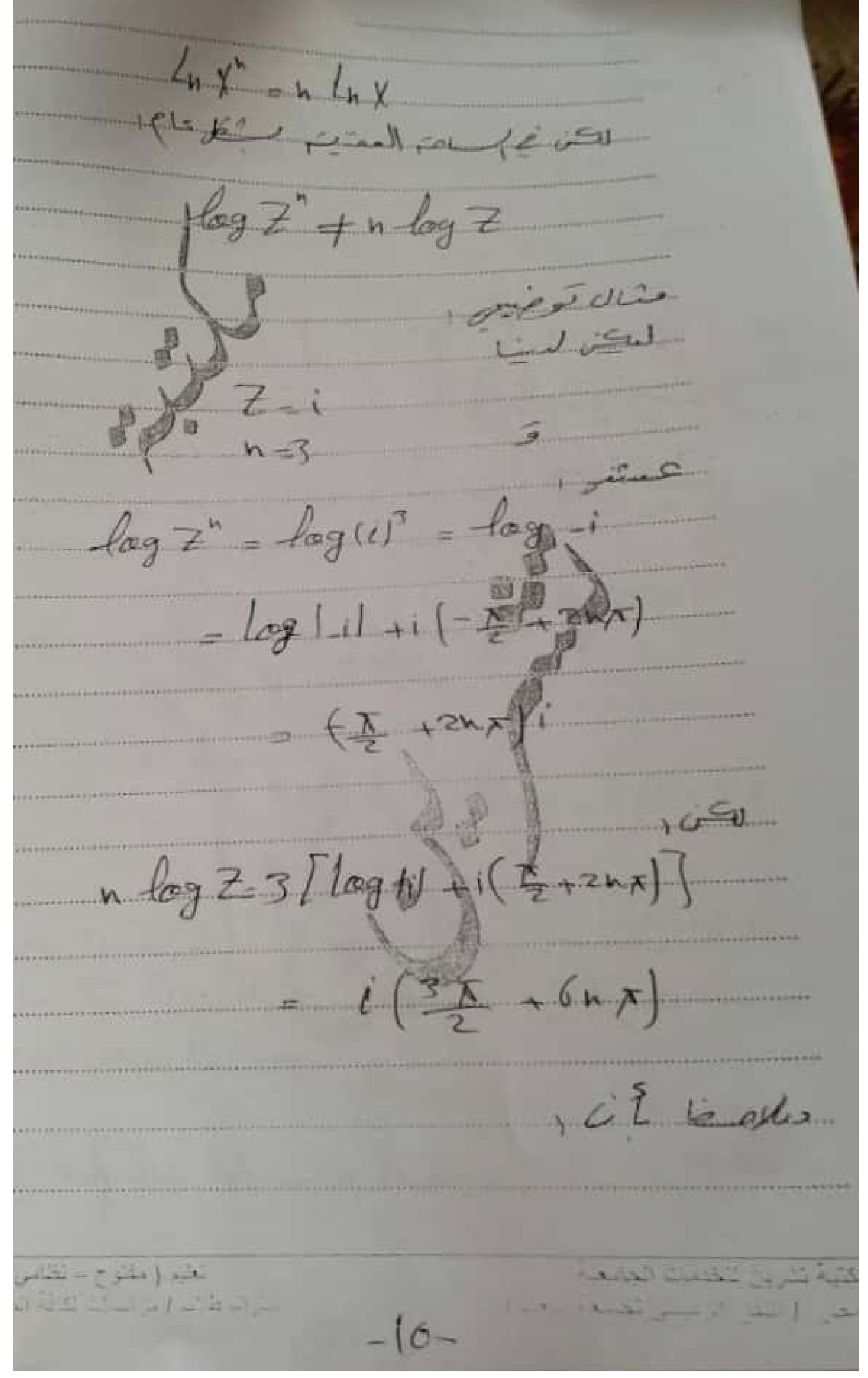
$$e^{\log z} = z$$

نستنتج أن

$$z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log z}$$

من هذه المساواة من أجل قيمة معينة واحدة لـ z أن الطرف الأيمن يقابله n قيم من الطرف الأيسر

⑥ نعم ثابت في الجسم الحقيقي كحقيقي



$$\ln x^n = n \ln x$$

لكن في الحسابات العقدية بشكل عام

$$\log z^n \neq n \log z$$

مثال توضيحي

لتكن لدينا

$z = i$

و

$n = 3$

عندئذ

$$\log z^n = \log (i)^3 = \log -i$$

$$= \log |-i| + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

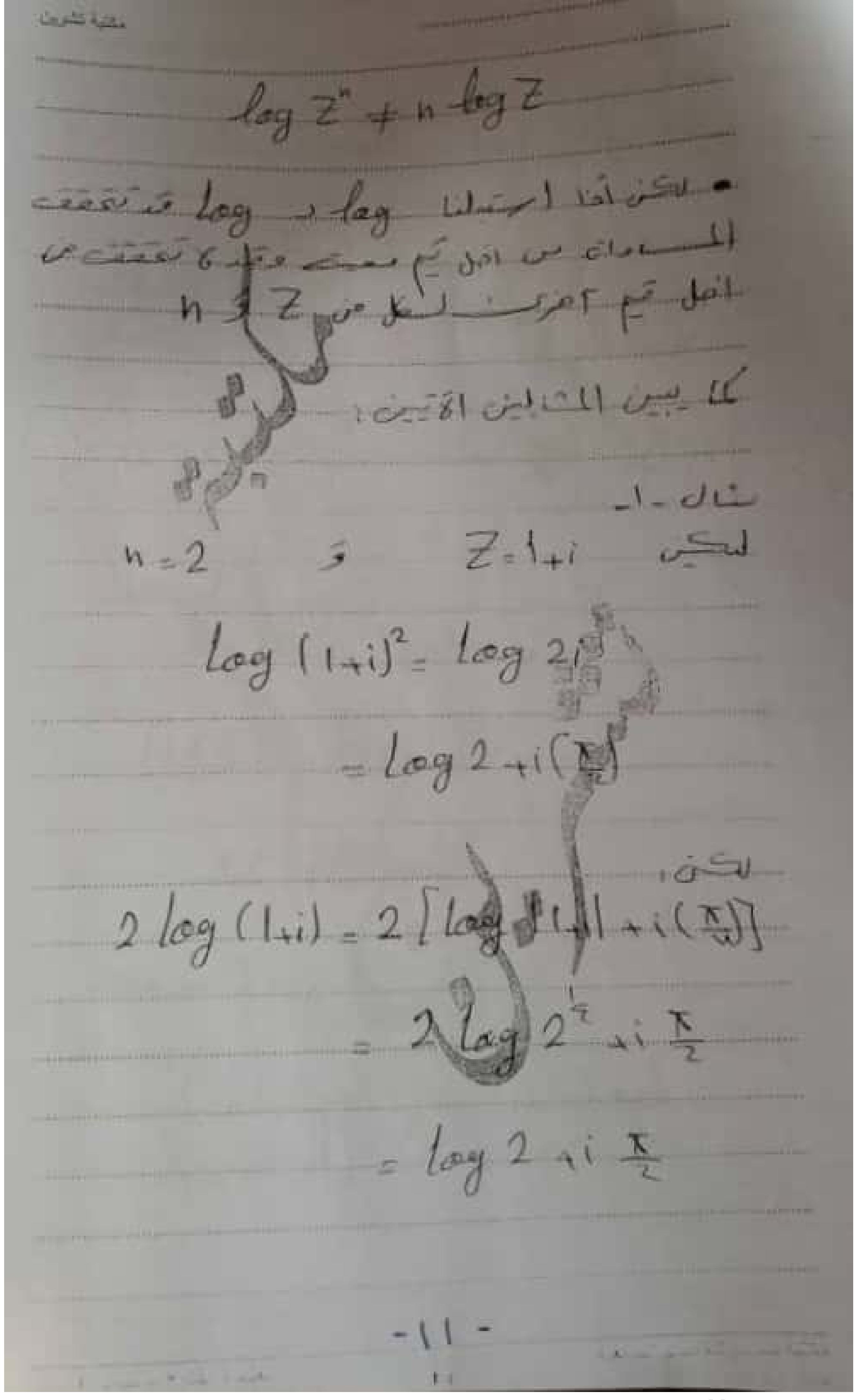
$$= \left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) i$$

لكن

$$n \log z = 3\left[\log |i| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right]$$

$$= i\left(\frac{3\pi}{2} + 6n\pi\right)$$

ملاحظة



$$\log z^n \neq n \log z$$

• لكن اذا استعملنا Log بدل log قد تتحقق المساواة من اجل قيم معينة فقط و لا تتحقق من اجل قيم اخرى لكل من Z و n

كما يبين المثالين الآتيين:

مثال -1-

ليكن $Z = 1+i$ و $n = 2$

$$\text{Log}(1+i)^2 = \text{Log}\, 2i$$

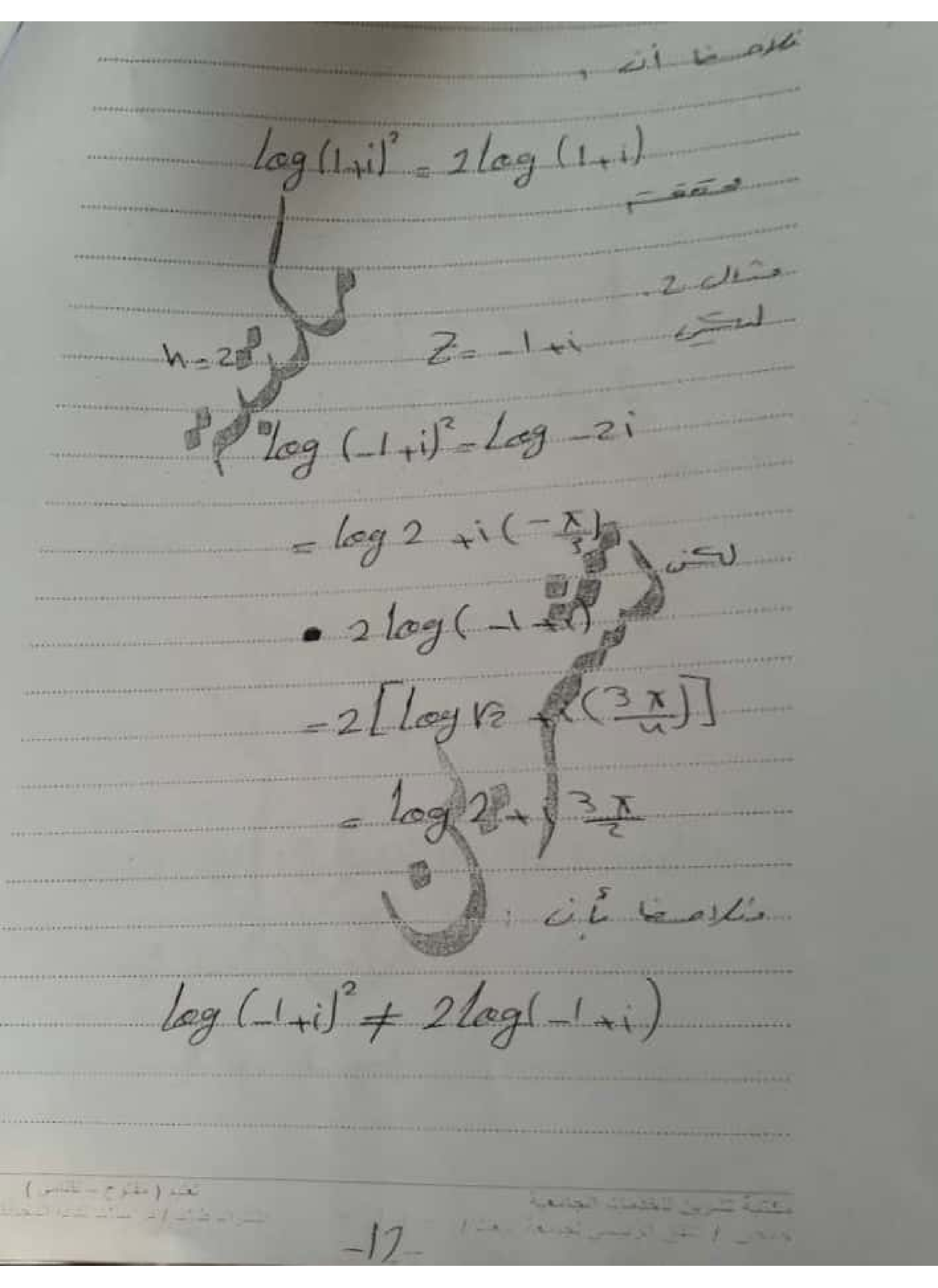
$$= \text{Log}\, 2 + i\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

لكن:

$$2\log(1+i) = 2\left[\text{Log}|1+i| + i\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2\,\text{Log}\, 2^{\frac{1}{2}} + i\frac{\pi}{2}$$

$$= \text{Log}\, 2 + i\frac{\pi}{2}$$



نلاحظ أنه :

$$\log(1+i)^2 = 2\log(1+i)$$

متحقق

مثال 2.

لتكن $z = -1+i$

$$\log(-1+i)^2 = \log -2i$$

$$= \log 2 + i\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

لكن

$$2\log(-1+i)$$

$$= 2\left[\log\sqrt{2} + i\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \log 2 + i\,\frac{3\pi}{2}$$

نلاحظ أن :

$$\log(-1+i)^2 \neq 2\log(-1+i)$$

• اذا كان مجموع المصورين عناصر الفرع المستطيع فان المساواه

$$\log Z^n \neq n \log Z$$

غير صحيح كما في المثال التالي

• واذا كان مجموع المصورين عناصر الفرع القاطع فان المساواه صحيحة كما في المثال الممثل اي.

$$\log Z^n = n \log Z$$

دالة الاس المركبة:

اذا كان i عدد عقدي ثابت عشير الدالة

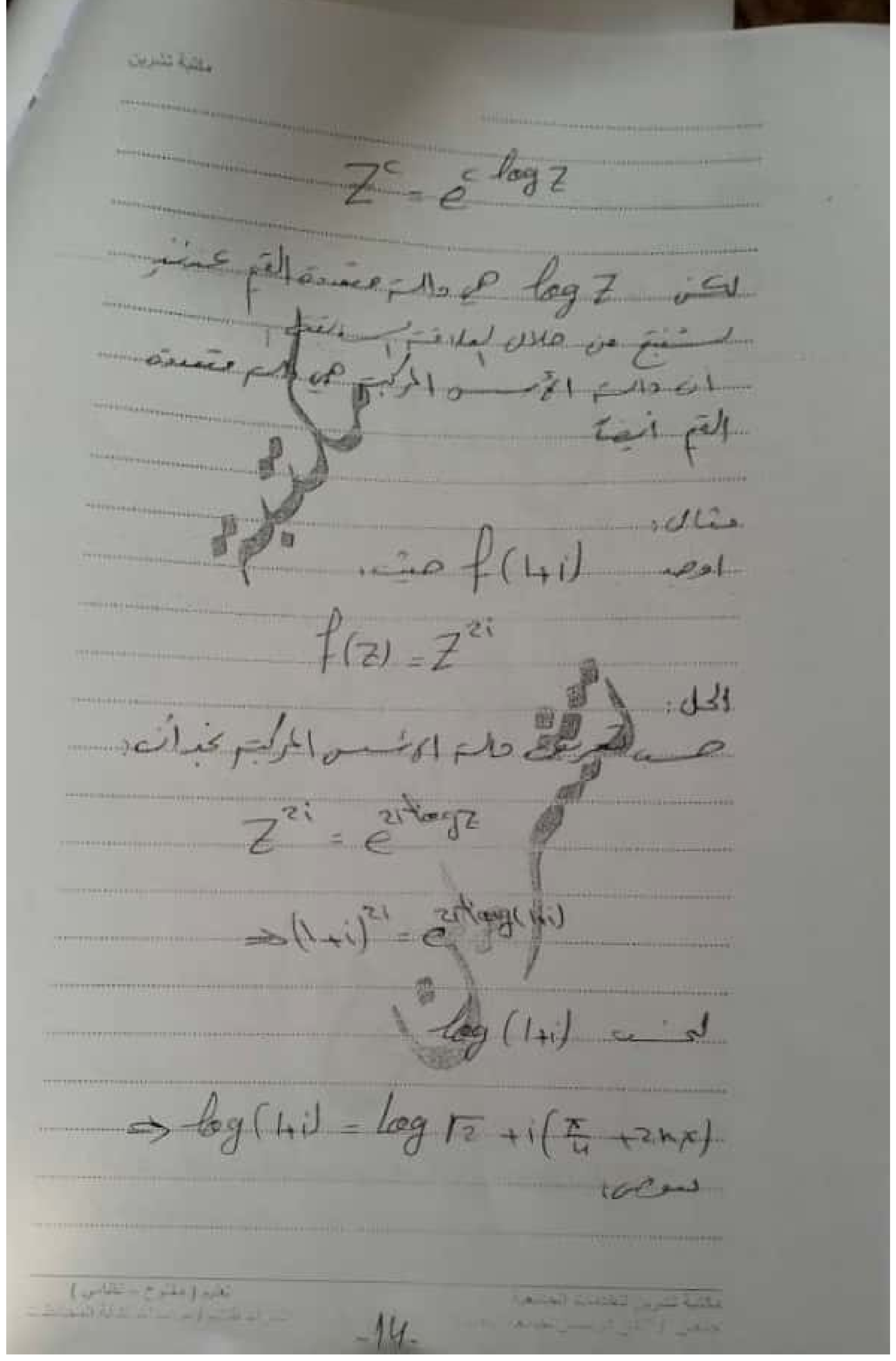
$$f(z) = z^i$$

تدعى دالة الاس المركبة

مثال:

$$f(z) = z^i$$

تعرف دالة الاس المركبة من خلال العلاقة الاتية



$$Z^c = e^{c \log Z}$$

لكن $\log Z$ هي دالة متعددة القيم عدد غير منتهٍ

نستنتج من خلال العلاقة السابقة

ان دالة الأس المركب هي دالة متعددة

القيم أيضاً

مثال:

اوجد $f(1+i)$ حيث:

$$f(z) = Z^{2i}$$

الحل:

حسب تعريف دالة الأس المركب نجد أن:

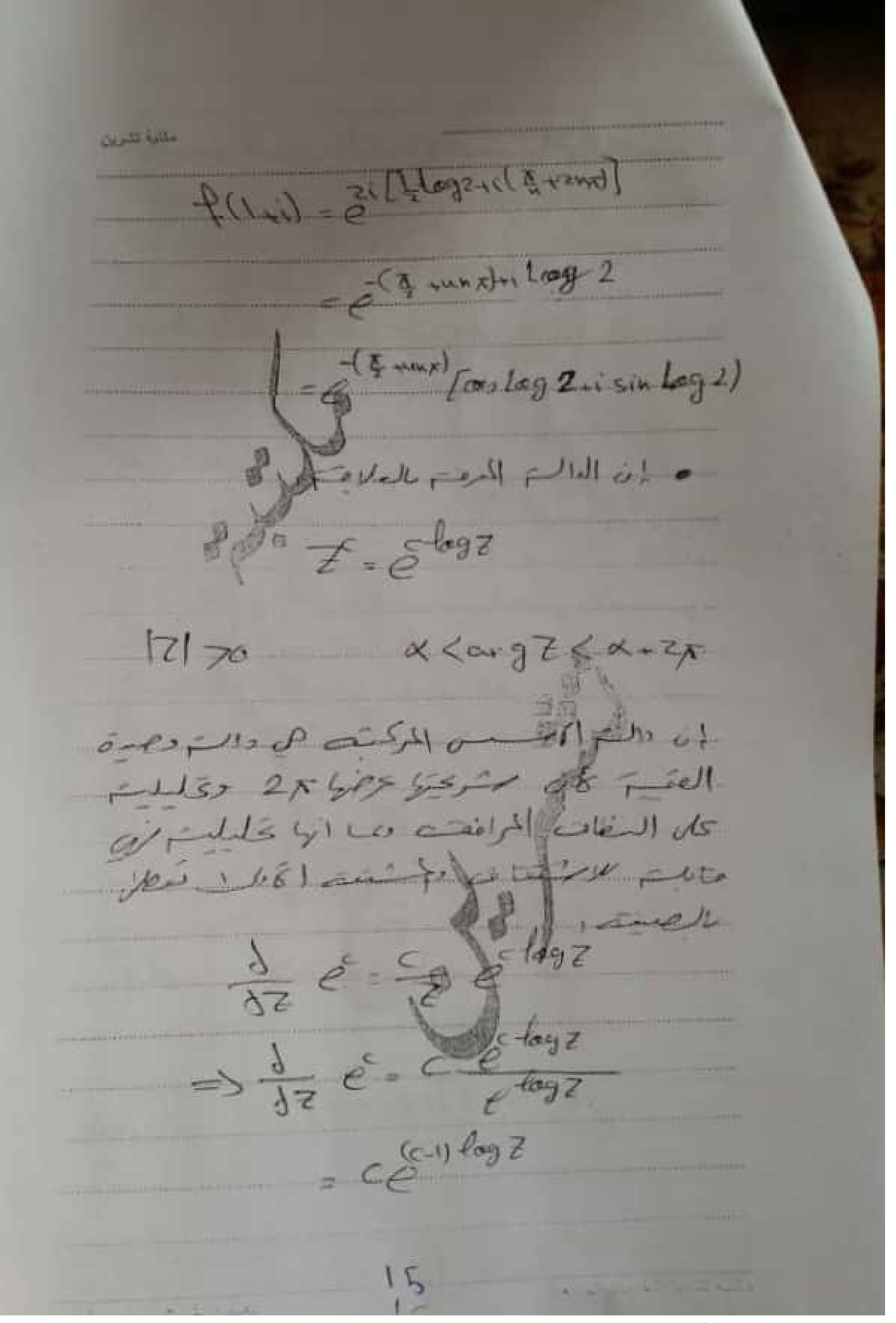
$$Z^{2i} = e^{2i \log Z}$$

$$\Rightarrow (1+i)^{2i} = e^{2i \log(1+i)}$$

لنحسب $\log(1+i)$

$$\Rightarrow \log(1+i) = \log\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)$$

نعوض:



$$f(1+i) = e^{2i\left[\frac{1}{2}\log 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)\right]}$$

$$= e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 4n\pi\right) + i\log 2}$$

$$= e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 4n\pi\right)}\left(\cos\log 2 + i\sin\log 2\right)$$

• إن الدالة المعرفة بالعلاقة

$$z = e^{\log z}$$

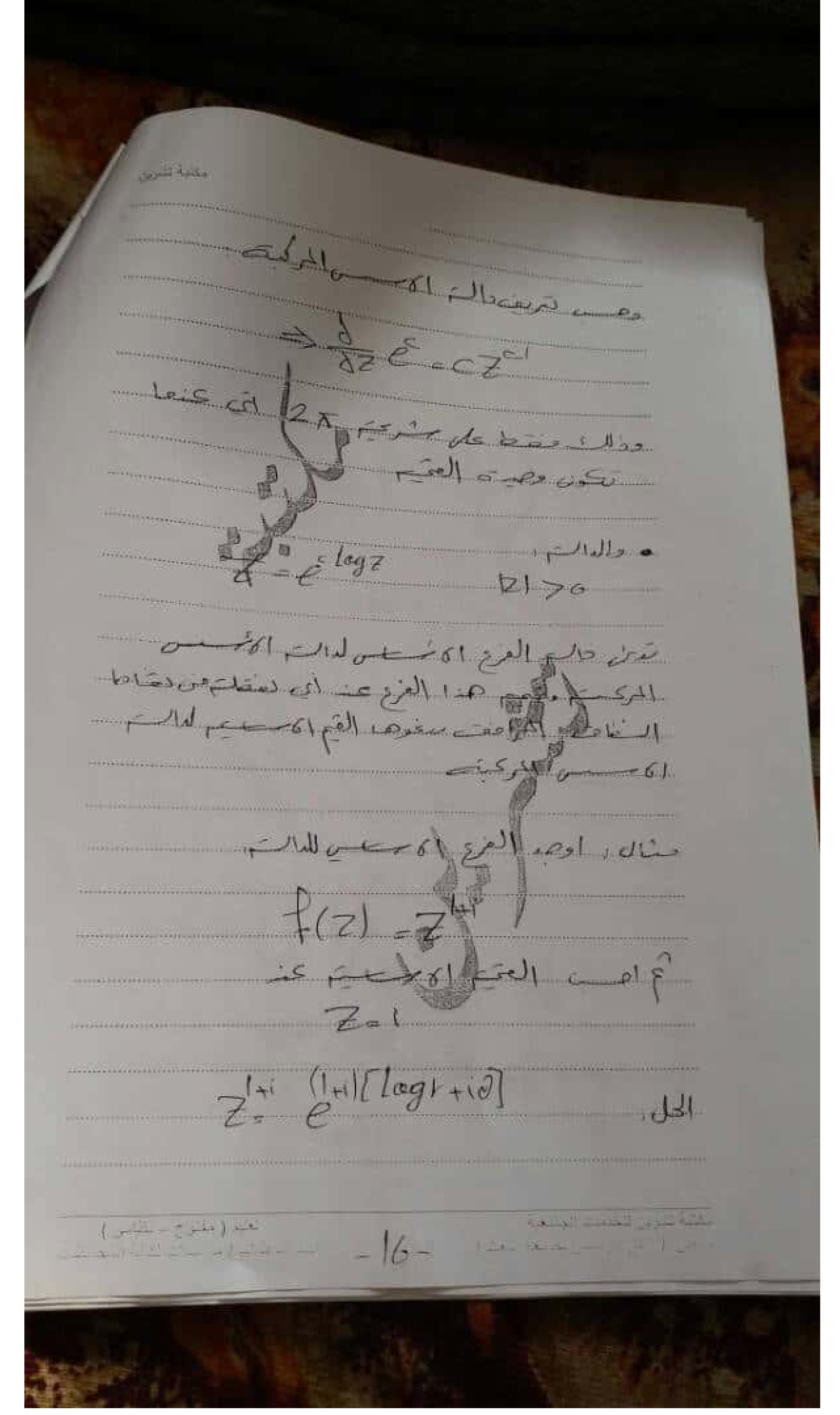
$$|z| > 0 \qquad \alpha < \arg z \leq \alpha + 2\pi$$

إن الدالة الأسية المركبة هي دالة دورية العقدية لها دوراً تخيلياً صرفاً 2π وتحليلية كل المستوي المركب ومن أنها تحليلية في كل مكان لا تمتلك نقاطاً شاذة لذلك تسمى بالصحيحة.

$$\frac{d}{dz}\, z^{c} = \frac{c}{z}\, e^{c\log z}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dz}\, z^{c} = c\,\frac{e^{c\log z}}{e^{\log z}}$$

$$= c\, e^{(c-1)\log z}$$



ومن تعريف الدالة الاسية المركبة

$$\frac{d}{dz} e^{c} = c z^{c-1}$$

وذلك فقط على شريحة 2π اي عندما تكون موحدة القيمة

• والدالة $z = e^{i\log z}$ ، $|z| > 0$

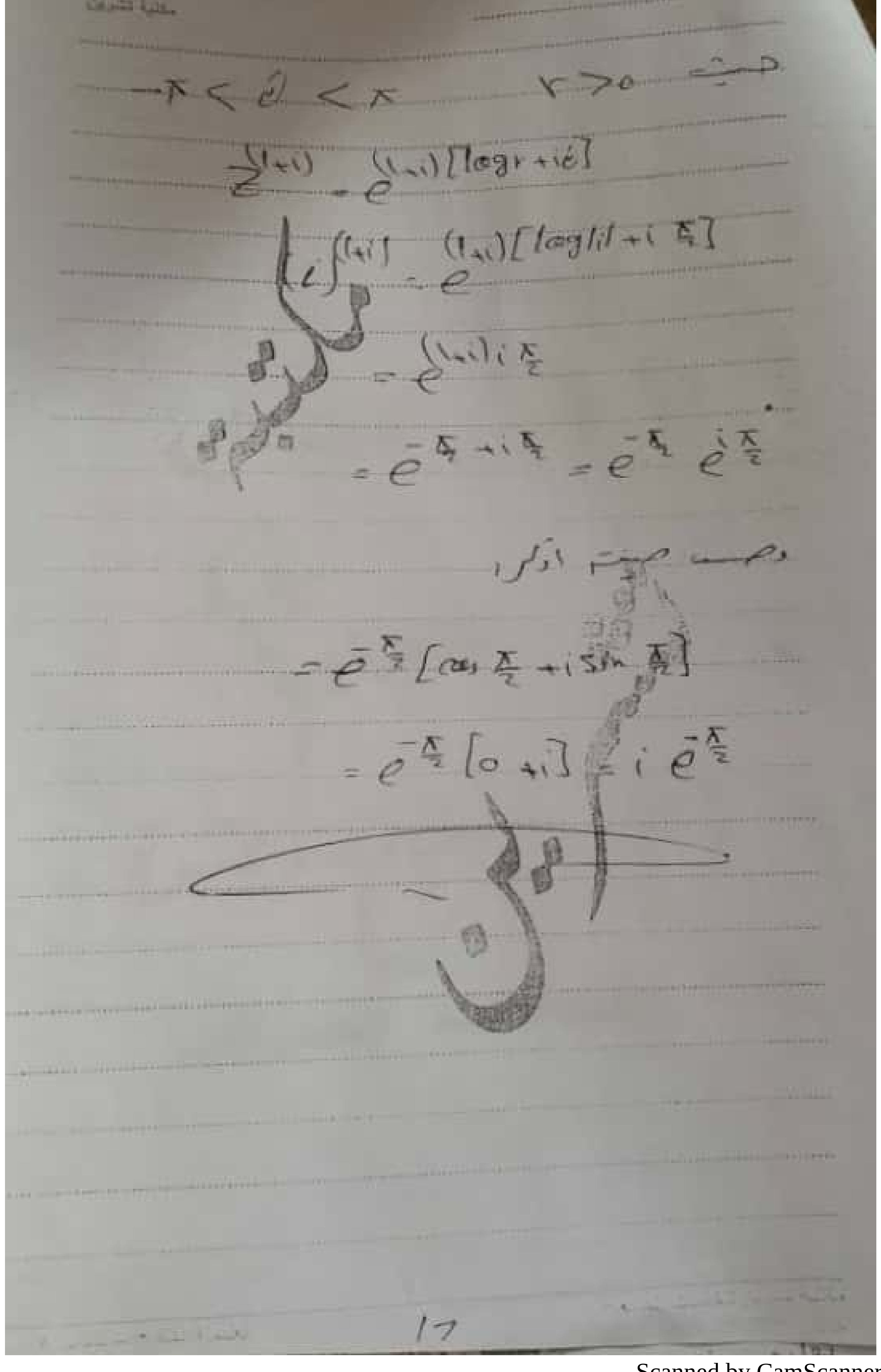
تعرف دالة الفرع الاساسي لدالة الأس المركبة ... هذا الفرع عند اي نقطة من نقاط الشعاع السالب ... القيم الاساسية لدالة الأس المركبة

مثال: اوجد الفرع الاساسي للدالة

$$f(z) = z^{1+i}$$

ثم احسب القيمة الاساسية عند $z = 1$

الحل: $z^{1+i} = e^{(1+i)[\log 1 + i0]}$



حيث $r > 0$ $\quad -\pi < \theta < \pi$

$$z^{(1+i)} = e^{(1+i)[\log r + i\theta]}$$

$$i^{(1+i)} = e^{(1+i)[\log|i| + i\frac{\pi}{2}]}$$

$$= e^{(1+i)i\frac{\pi}{2}}$$

$$= e^{-\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\pi}{2}}$$

وحسب صيغة أويلر

$$= e^{-\frac{\pi}{2}}[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}]$$

$$= e^{-\frac{\pi}{2}}[0 + i] = i e^{-\frac{\pi}{2}}$$